

TD₁₁ – Réduction des endomorphismes, Diagonalisation**Exercices à préparer**

Exercice 1 ★

Déterminer si les matrices suivantes sont diagonalisables et, le cas échéant, les diagonaliser

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 2 & -7 & 6 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 ★★★

Soient a, b deux réels, avec $a \neq 0$ et soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par $u(P) = P(aX + b)$.

1. Déterminer les valeurs propres de u .
2. Montrer que si $a \notin \{-1, 1\}$, alors u est diagonalisable.
3. Si $a = 1$, quelles sont les valeurs de b pour lesquelles u est diagonalisable ?
4. On suppose à présent que $a = -1$. Montrer que $p = \frac{\text{Id} + u}{2}$ est un projecteur de $\mathbb{R}_n[X]$. En déduire que u est diagonalisable.